Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Funktionen**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (1) Welche der folgenden Relationen sind Funktionen von A nach B? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

(i) $A = B = \{2, 4, 6\}$, $\mathcal{R} = \{(2, 2), (4, 4), (2, 6)\}$.

(ii) $A = B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$.

(iii) $A = B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.

Bestimmen Sie Definitionsmenge und Wertemenge der Funktionen.

Aufgabe 2 (1) Gegeben sei die Abbildung

$$f : \{-2, 0, 1, 2, 3\} \to \{-16, -1, 0, 1, 4, 16, 81, 256\} \text{ durch } x \mapsto x^4$$

Bestimmen Sie folgende Mengen:
$f(\{0, 3\})$, $f(\{-2, 2\})$, $f^{-1}(\{-16, 0, 16\})$, $f^{-1}(\{-1, 4, 256\})$, $f^{-1}(\{-1, 1, 81\})$.

Aufgabe 3 (2) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$.

a) Begründen Sie, warum f eine Funktion ist.

b) Berechnen Sie $f(\mathbb{R})$ und $f(A)$, wobei $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ ist.

c) Berechnen Sie $f^{-1}(\{1\})$ und $f^{-1}(B)$, wobei $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ ist.

d) Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv?

Aufgabe 4 (2) Es sei $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$ und die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{3}{5+x^2}$.

(i) Bestimmen Sie $f^{-1}\left(\left\{\frac{3}{5}\right\}\right)$ und $f^{-1}(B)$, wobei $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$.

(ii) Bestimmen Sie die Wertemenge $f(A)$.

(iii) Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv? (Begründen Sie!)

Aufgabe 5 (1) Es seien zwei Funktionen gegeben

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \qquad g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto 1 + x^2 & x &\mapsto (1, x^2). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie, welche der Kompositionen existieren, und geben Sie für diese Kompositionen die Funktionsvorschrift explizit an:

$$f \circ g, \quad g \circ f, \quad f \circ f, \quad g \circ g.$$

Aufgabe 6 (1) *Injektiv, Surjektiv, Bijektiv I*
Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv, bijektiv oder nichts davon sind.

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$

(b) $f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \lfloor x \rfloor$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3$

(e) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin x$

(f) $f_6 : \mathbb{R} \to [-1, 1], \quad x \mapsto \cos x$

(g) $f_7 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, \quad x \mapsto \sqrt{2x}$

(h) $f_8 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto y$

(i) $f_9 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad x \mapsto 1/x$

(j) $f_{10} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \quad (a, b) \mapsto a^2 + b^2$

Wobei hier $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Aufgabe 7 (2) *Injektiv, Surjektiv, Bijektiv II*
Finden Sie jeweils möglichst einfache Beispiele von (endlichen) Mengen A und B, sowie eine Abbildung $f : A \to B$ sodass gilt:

(a) f ist weder injektiv noch surjektiv

(b) f ist injektiv, aber nicht surjektiv

(c) f ist nicht injektiv, aber surjektiv

(d) f ist sowohl injektiv als auch surjektiv

Weisen Sie jeweils nach, dass ihre Beispiele die geforderten Eigenschaften erfüllen.

Aufgabe 8 (3) *Injektivität und Surjektivität von Kompositionen*
Seien A, B und C nichtleere Mengen.
Die Abbildung

$$g \circ f : A \to C \qquad \text{vermöge} \qquad (g \circ f)(a) := g(f(a)), \quad a \in A$$

heißt <u>Komposition</u> zweier gegebener Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$.
Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Sind f und g injektiv, so auch $g \circ f$

(b) Sind f und g surjektiv, so auch $g \circ f$

(c) Sind f und g bijektiv, so auch $g \circ f$

(d) Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv

Zeigen Sie dann durch Angabe geeigneter Gegenbeispiele, dass die Umkehrungen jeweils nicht allgemein gelten.

Aufgabe 9 (2)

a) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. (Begründen Sie Ihre Antwort!)

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 & h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ f(x) = 2x - 3 & g(x) = (1, 2x - 3) & h(x_1, x_2) = (x_2^2, x_1^2). \end{array}$$

b) Bestimmen Sie, welche der folgenden Kompositionen von Funktionen existieren, und geben Sie für diese Kompositionen die Vorschrift für F_j explizit an:

$$F_1 := f \circ g, \quad F_2 := g \circ f, \quad F_3 := h \circ f, \quad F_4 := g \circ h, \quad F_5 := h \circ g, \quad F_6 := h \circ h.$$

c) Falls F_j existiert, beschreiben Sie die Bildmenge von F_j.

Aufgabe 10 (4) Es sei A eine Menge. Beweisen Sie, dass es keine Surjektion von A nach $\mathcal{P}(A)$ gibt. (*Hinweis:* Sei $f : A \to \mathcal{P}(A)$ eine beliebige Abbildung. Zeigen Sie, dass $\{ a \in A \mid a \notin f(a)\} \notin f(A)$.)